группы голономий. М., 1960. 216 с.

7. Б л и з н и к а с В.И. О некоторых связностях расслоенных пространств // Литовский матем. сб. 1967. Т.7. № 1. С.5-16.

8. В а с и л ь е в А.М. Теория дифференциально- геометрических структур. М.:МГУ, 1987. 190 с.

9. Л у м и с т е Ю.Г. Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т.69. С.434-469.

10. С т е р н б е р г С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970. 412 с.

11. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.29-48.

12. Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.115-120.

13. Л у м и с т е Ю.Г. Инвариантные оснащения конгруэнции плоскостей аффинного пространства // Известия вузов. Математика. 1965. № 6. С.93-102.

14. В а г н е р В.В. Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии // Веблен О., Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. М., 1949. С.135-223.

15. Л у м и с т е Ю.Г. Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-кореперов // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.5. С.239-257.

16. Р ы б н и к о в А.К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Известия вузов. Математика. 1983. № 1. С.73-80.

17. В а г н е р В.В. Теория составного многообразия // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. М.;Л., 1950. Вып.8. С.11-72.

18. Б л и з н и к а с В.И. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Литовский матем. сб. 1966. Т.6. № 2. С.141-209.

19. Л у м и с т е Ю.Г. Теория связностей в расслоенных пространствах // Алгебра, топология, геометрия. 1969 / ВИНИТИ. М., 1971. С.123-168.

20. Л а п т е в Г.Ф. Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Тр. геометр. семинара/ ВИНИТИ. М., 1969. Т.2. С.161-178.

21. Ehresmann C. Sur les connexions d'ordre supérieur. // Atti del V Congresso del l'Unione Mathematica Italiana, 1955. Roma-Cremonese, 1956. P. 326-328.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК В P_3 С ЧЕТЫРЕХКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.В.Ш м е л е в а

(Калининградское ВИМУ)

В трехмерном проективном пространстве исследуется подкласс конгруэнций линейчатых невырожденных квадрик Q с четырехкратной фокальной поверхностью (A_0), охватывающий класс конгруэнций квадрик Ли поверхности (A_0). Найдены характеристические признаки таких конгруэнций и изучены некоторые подклассы.

Среди конгруэнций линейчатых квадрик Q с четырехкратной фокальной поверхностью особую роль играют конгруэнции N, характеризующиеся одним из следующих признаков: 1) имеется по крайней мере одна фокальная точка $A_0 \in Q$ второго порядка [2, с.61], описывающая невырождающуюся поверхность; 2) ассоциированные с фокальной точкой $A_0 \in Q$ квадрики Q_i [1, с.44] являются конусами с вершиной A_0; 3) любая линия на фокальной поверхности (A_0) является и линией Γ_1, и линией Γ_2 [3, с.107].

Отнесем конгруэнцию N к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0 – фокальная точка второго порядка квадрики $Q \in N$, A_3 – одна из остальных фокальных точек квадрики, а A_1, A_2 – точки пересечения прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через фокальные точки A_0 и A_3. Система уравнений Пфаффа конгруэнции N запишется (см.[2], (I,I), (I.9)) в виде

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \ \omega_3^0 = 0, \ \ \omega_i^j = a^j_{ik}\,\omega^k, \ \ \omega_i^3 - \omega^j = 0, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{ik}\,\omega^k, \ \ \omega_3^i = b^i_k\,\omega^k, \ \ \Omega = h_k\,\omega^k, \end{cases} \qquad (1)$$

где ω_α^β $(\alpha, \beta = 0,1,2,3)$ – компоненты деривационных формул репера,

$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i, \quad \Omega = \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 \quad (i,j,k=1,2;\ i \neq j),$

и по индексам i и j суммирование не производится. Замыкая уравнения (1), получим

$$b_1^1 \lambda_{12} - b_2^2 \lambda_{21} + b_1^2 \lambda_{22} - b_2^1 \lambda_{11} = 0, \quad h_i + 2a_{ij}^j = 0. \qquad (2)$$

Ассоциированные квадрики Q_i определяются уравнениями:

$$h_i x^1 x^2 - a_{ii}^j (x^i)^2 - a_{ji}^i (x^j)^2 + \lambda_{ki} x^k x^3 = 0. \qquad (3)$$

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией N' называется конгруэнция N, у которой точки A_1 и A_2 полярно сопряжены относительно обеих ассоциированных квадрик.

Из (3) следует, что конгруэнции N' характеризуются соотношениями

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0. \qquad (4)$$

Замыкая уравнение $\Omega = 0$, получим:

$$\lambda_{12} = \lambda_{21}. \qquad (5)$$

Следовательно, конгруэнции N' определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Конгруэнция N тогда и только тогда является конгруэнцией N', когда выполняется одно из следующих условий: 1) линии a_i на поверхности (A_0) [4, с.129] огибаются асимптотическими касательными A_0A_j; 2) $A_1 \in Q_2$ и $A_2 \in Q_1$; 3) квадрика Ли $\widetilde{Q}$ поверхности (A_0) пересекается с квадрикой Q по паре сдвоенных асимптотических касательных A_0A_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Линии a_i определяются уравнениями $a_{ii}^j \omega^i + a_{ij}^j \omega^j = 0$. Они совпадают с линиями $\omega^j = 0$ тогда и только тогда, когда $a_{ij}^j = 0$. Из (4) следует, что рассматриваемая конгруэнция является конгруэнцией N'.

2) Подставляя координаты точки A_j в уравнение ассоциированной квадрики Q_i, получим: $a_{ij}^j = 0$, что характеризует конгруэнции N'.

3) Продолжая последнее уравнение системы (1), находим:

$$dh_i = h_i(\omega_i^i - \omega_0^0) + (h_{ii} - 2\lambda_{ii} + h_j a_{ii}^j)\omega^i + (h_0 - 2\lambda_{ij} - \tfrac{1}{2} h_i h_j)\omega^j. \qquad (6)$$

Для конгруэнции N' из (6) находим:

$$h_{ii} = \tfrac{1}{2}\lambda_{ii}, \quad h_0 = 2\lambda_{12}. \qquad (7)$$

Для конгруэнции N уравнение квадрики Ли $\widetilde{Q}$ фокальной поверхности (A_0) запишется в виде:

$$2(x^1x^2 - x^0x^3) + h_k x^k x^3 + (h_0 - \tfrac{3}{2} h_1 h_2)(x^3)^2 = 0. \qquad (8)$$

Квадрика $\widetilde{Q}$ пересекается с квадрикой Q по паре асимптотических касательных A_0A_1, A_0A_2 и конике C, определенной уравнением (8) и уравнением:

$$h_1 x^1 + h_2 x^2 + (h_0 - \tfrac{3}{2} h_1 h_2) x^3 = 0. \qquad (9)$$

Из (9) следует, что для конгруэнции N' и только для нее коника C распадается на пару прямых A_0A_i.

Из (7) и (2) следует, что уравнение квадрики Ли $\widetilde{Q}$ для конгруэнции N' имеет вид:

$$x^1x^2 - x^0x^3 + \lambda_{12}(x^3)^2 = 0. \qquad (10)$$

Из (5) и (10) непосредственно вытекает

Т е о р е м а 2. Конгруэнция N' тогда и только тогда является конгруэнцией квадрик Ли фокальной поверхности (A_0), когда асимптотическая касательная A_3A_j является прямолинейной образующей ассоциированной квадрики Q_i.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией N_0' называется конгруэнция N, у которой точки A_i и A_3 полярно сопряжены относительно ассоциированной квадрики Q_i.

Т е о р е м а 3. Конгруэнции N_0' существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнции N_0' выделяются из конгруэнций N' соотношениями:

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{22} = 0. \qquad (11)$$

Из (2), (5) находим:

$$b_1^1 = b_2^2. \qquad (12)$$

При этом мы исключили рассмотренный выше случай конгруэнций квадрик Ли поверхности (A_0). Обозначим

$$b = b_1^1, \quad \lambda = \lambda_{12}. \qquad (13)$$

Система (1) приводится к виду:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ii}^j \omega^i, \quad \omega_i^3 - \omega^j = 0, \quad \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda\omega^j, \\ \omega_3^i = b\omega^i + b_j^i \omega^j, \quad \Omega = 0, \quad \tfrac{1}{2} d\lambda + \lambda\omega_0^0 = b_2^1 \omega_1^2 + b_1^2 \omega_2^1 \end{cases} \qquad (14)$$

Анализируя ее, убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 4. Фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции A_1A_2, ассоциированной с конгруэнцией N_0', гармонически делят точки A_1 и A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F = p^1A_1 + p^2A_2$ - фокус луча A_1A_2. Используя (14), находим:

$$b_1^2 (p^1)^2 - b_2^1 (p_2)^2 = 0, \qquad (15)$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а 5. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3), ассоциированных с конгруэнцией N_0', соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (14), убеждаемся, что торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) определяются одним и тем же уравнением

$$b_1^2 (\omega^1)^2 - b_2^1 (\omega^2)^2 = 0. \qquad (16)$$

Пусть $\tilde{F} = rA_0 + sA_3$ - фокус луча $A_0A_3 \in (A_0A_3)$. Тогда

$$r^2 + 2rsb - b_1^2 b_2^1 s^2 = 0. \qquad (17)$$

Асимптотические линии на поверхности (A_3) определяются уравнением

$$(2b+\lambda)(b_1^2(\omega^1)^2 + b_2^1(\omega^2)^2) + 2(b_1^2 b_2^1 + b(b+\lambda))\omega^1\omega^2 = 0. \qquad (18)$$

О п р е д е л е н и е 3. Конгруэнцией $N_{0,1}'$ называется конгруэнция N_0', характеризуемая тем, что фокусы луча A_0A_3 гармонически делят точки A_0 и A_3, а асимптотические линии на поверхностях (A_0) и (A_3) не соответствуют.

Конгруэнция $N_{0,1}'$ определяется условиями:

$$b = 0, \quad b_1^2 b_2^1 \neq 0. \qquad (19)$$

Нормируя репер так, что

$$b_1^2 = 1, \quad b_2^1 = 1, \qquad (20)$$

приведем систему уравнений Пфаффа (14) к виду:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ii}^j \omega^i, \quad \omega_i^3 = \omega^j, \\ \omega_i^0 = \omega^i + \lambda\omega^j, \quad \omega_3^i = \omega^j, \quad \Omega = 0, \quad \frac{1}{2} d\lambda + \lambda\omega_0^0 = \omega_1^2 + \omega_2^1. \end{cases} \qquad (21)$$

Геометрическая характеристика осуществленной формулами (20)

нормировки вершин репера состоит в том, что единичные точки сторон A_1A_2 и A_0A_3 помещаются в один из фокусов соответствующих лучей.

Конгруэнции $N_{0,1}'$ характеризуются тем, что линии, огибаемые прямолинейными образующими A_0A_i и A_3A_j квадрики $Q \in N_{0,1}'$ на поверхностях (A_0) и (A_3), соответствуют.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $N_{0,2}'$ называется конгруэнция N_0' с соответствием линий, огибаемых на поверхностях (A_0) и (A_3) прямолинейными образующими A_0A_1 и A_3A_1, A_0A_2 и A_3A_2.

Такие конгруэнции характеризуются соотношениями:

$$b_1^2 = 0, \quad b_2^1 = 0. \qquad (22)$$

Подставляя (20) в (14), приведем систему уравнений конгруэнции $N_{0,2}'$ к виду:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ii}^j \omega^i, \quad \omega_i^3 - \omega^j = 0, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda\omega^j, \quad \omega_3^i = b^i, \quad \Omega = 0, \\ d\lambda + 2\lambda\omega_0^0 = 0, \quad db + 2b\omega_0^0 = 0. \end{cases} \qquad (23)$$

Замыкание этой системы состоит из двух квадратичных уравнений:

$$(da_{ii}^j + a_{ii}^j(\omega_0^0 - \omega_i^i)) \wedge \omega^j = 0. \qquad (24)$$

Замкнутая система (23), (24) - в инволюции и определяет конгруэнции $N_{0,2}'$ с произволом двух функций одного аргумента.

Конгруэнции $N_{0,2}'$ характеризуются тем, что касательная плоскость к поверхности (A_1) содержит точку A_2, и наоборот.

Т е о р е м а 6. Конгруэнция N_0' тогда и только тогда является конгруэнцией $N_{0,2}'$, когда прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) вырождается в совокупность прямых, инцидентных одной плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$M = (b+\lambda)A_0 + A_3. \qquad (25)$$

Используя уравнения

$$db + 2b\omega_0^0 = 0, \quad d\lambda + 2\lambda\omega_0^0 = 0 \qquad (26)$$

системы (23), находим

$$d(A_1A_2M) = -\omega_0^0(A_1A_2M).$$

Следовательно, плоскость (A_1A_2M) - инвариантная. Она содержит луч A_1A_2. Наоборот, если плоскость (A_1A_2M) - инвариантная, то $b_1^2 = 0$, $b_2^1 = 0$, т.е. конгруэнция N_0' является конгруэнцией $N_{0,2}'$.

Библиографический список

I. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линеичатых квадрик с кратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I98I. Вып.I2. С.44-47.

2. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I982. Вып.I3. С.60-64.

3. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнция линейчатых квадрик с четырехкратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I986. Вып.I7. С.I06-I09.

4. Ш м е л е в а С.В. Об одном классе конгруэнций коник с шестикратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I989. Вып.20. С.I28-I3I.

С е м и н а р
по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках сборника освещена работа семинара по 27 декабря I989 года. Ниже приводится перечень докладов, обсужденных на семинаре в I990 году.

I4.02.90. Б.А.А н д р е е в. Характеристическая конфигурация деформации точечного соответствия в кинематике сплошной среды.

2I.02.90. С.Ю.В о л к о в а. О проективно-дифференциальной геометрии $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,\mathcal{L})$-распределения.

28.02.90. М.Ф.Г р е б е н ю к (г.Киев). Дифференциально-геометрические структуры $\mathcal{H}$-распределения.

7.03.90. В.С.М а л а х о в с к и й. Конгруэнции орициклов в трехмерном пространстве Лобачевского.

I4.03.90. Н.В.М а л а х о в с к и й. О фокальной кривой проективной плоскости, порожденной двупараметрическим семейством оснащенных коллинеаций.

2I.03.90. В.А.Р я б у ш к о (г.Минск). Геометрия векторных полей в трехмерном псевдоевклидовом пространстве с приложениями к некоторым задачам релятивистской гидромеханики.

28.03.90. В.В.М а х о р к и н. Деформация фокальных многообразий.

4.04.90. Ю.И.П о п о в. Структуры расслоенных многообразий, ассоциированных с многообразием $P^\circ(\mathcal{H})$.

II.04.90. Е.В.С к р ы д л о в а. Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных линейчатой квадрикой и прямой.

I8.04.90. В.Н.Х у д е н к о. К вопросу о фокальных образах многообразий многомерных квадрик в многомерном проективном пространстве.

25.04.90. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Лифт связности в продолженном главном расслоении.

I6.05.90. С.В.Ш м е л е в а. Об одном расширении класса конгруэнций квадрик Ли гладкой поверхности.

23.05.90. С.Ю.В о л к о в а. $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,\mathcal{L})$-распределения проективного пространства.

20.06.90. Г.Ш.Т о д у а (г.Тбилиси). Некоторые вопросы